

CAPÍTULO 6

Espacio dual

1. Definición

Definición 1.1. Si V es un K -espacio vectorial, al K -espacio vectorial $\text{Hom}_K(V, K)$ lo representaremos por V^* y lo denominaremos *espacio dual de V* , y a sus elementos, *formas lineales de V* .

Además, si V es de dimensión finita, según vimos en el capítulo anterior, V^* también lo es y:

$$\dim_K V^* = \dim_K \text{Hom}_K(V, K) = \dim_K V \dim_K K = \dim_K V$$

de donde además se deduce que V y V^* son espacios vectoriales isomorfos.

2. Bases duales

Definición 2.1. Si V es K -espacio vectorial de dimensión finita $n > 0$ y $\mathbb{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ es una base ordenada de V , sabemos que la siguiente aplicación es un isomorfismo de K -espacios vectoriales, donde $\mathbb{B}_1 = (1)$ representa la base canónica de K :

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}_1} : \text{Hom}_K(V, K) &\longrightarrow M_{1 \times n}(K) \\ f &\longmapsto M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}_1}(f) \end{aligned}$$

por tanto, considerando la base canónica de $M_{1 \times n}(K)$, $(\Delta_1^1, \Delta_2^1, \dots, \Delta_n^1)$, se tiene que los siguientes elementos de $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$ constituyen una base de V^* :

$$b^1 = M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}_1}^{-1}(\Delta_1^1) \quad , \quad b^2 = M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}_1}^{-1}(\Delta_2^1) \quad , \quad \dots \quad , \quad b^n = M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}_1}^{-1}(\Delta_n^1)$$

A la base ordenada (b^1, b^2, \dots, b^n) de V^* la representaremos por \mathbb{B}^* y la denominaremos *base dual de \mathbb{B}* .

Proposición 2.2. Si $\mathbb{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ es una base ordenada de V y $\mathbb{B}^* = (b^1, b^2, \dots, b^n)$ es su base dual, entonces se verifica que:

- 1) Para $1 \leq i, j \leq n$ se tiene que $b^i(b_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$
- 2) $\forall v \in V$, la n -tupla de coordenadas de v en la base \mathbb{B} es $(b^1(v), b^2(v), \dots, b^n(v))$.
- 3) $\forall f \in V^*$, la n -tupla de coordenadas de f en la base \mathbb{B}^* es $(f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n))$.

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con la definición anterior, $\forall i, 1 \leq i \leq n$, se tiene que $b^i = M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}_1}^{-1}(\Delta_i^1)$, lo que equivale a que $M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}_1}(b^i) = \Delta_i^1 = [0, \dots, \underset{(i)}{1}, \dots, 0]$, donde (i) está indicando la posición del único término no nulo de esta matriz. Entonces se tiene:

- 1) Para calcular $b^i(b_j)$, haremos uso de la siguiente relación, vista en el capítulo anterior:

$$M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}_1}(b^i) [b_j]_{\mathbb{B}} = [b^i(b_j)]_{\mathbb{B}_1}$$

pero, puesto que la n -tupla de coordenadas de b_j en la base \mathbb{B} es $(0, \dots, \underset{(j)}{1}, \dots, 0)$, donde (j) está indicando la posición del único término no nulo, se tiene que:

$$M_{\mathbb{B}, \mathbb{B}_1}(b^i) [b_j]_{\mathbb{B}} = [0, \dots, \underset{(i)}{1}, \dots, 0] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \underset{(j)}{1} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

lo que nos da la igualdad buscada.

- 2) Supongamos que la n -tupla de coordenadas de $v \in V$ en la base \mathbb{B} es (v^1, v^2, \dots, v^n) , es decir, $v = v^1 b_1 + v^2 b_2 + \dots + v^n b_n$, entonces, para todo $i, 1 \leq i \leq n$, haciendo uso de que b^i es una aplicación lineal, y del apartado anterior, se tiene que:

$$b^i(v) = b^i(v^1 b_1 + v^2 b_2 + \dots + v^n b_n) = v^1 b^i(b_1) + v^2 b^i(b_2) + \dots + v^n b^i(b_n) = v^i$$

por lo que $v = b^1(v) b_1 + b^2(v) b_2 + \dots + b^n(v) b_n$ y por tanto la n -tupla de coordenadas de v en la base \mathbb{B} es $(b^1(v), b^2(v), \dots, b^n(v))$.

- 3) Supongamos que la n -tupla de coordenadas de $f \in V^*$ en la base \mathbb{B}^* es (f_1, f_2, \dots, f_n) , es decir, $f = f_1 b^1 + f_2 b^2 + \dots + f_n b^n$, entonces, para todo $i, 1 \leq i \leq n$, haciendo uso de la definición de las operaciones en V^* , así como del apartado 1), se tiene que:

$$f(b_i) = (f_1 b^1 + f_2 b^2 + \dots + f_n b^n)(b_i) = f_1 b^1(b_i) + f_2 b^2(b_i) + \dots + f_n b^n(b_i) = f_i$$

por lo que $f = f(b_1) b^1 + f(b_2) b^2 + \dots + f(b_n) b^n$ y por tanto la n -tupla de coordenadas de f en la base \mathbb{B}^* es $(f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n))$.

□

Ejemplo 2.3. Los vectores $b_1 = (1, 1, 0)$, $b_2 = (0, -1, 1)$ y $b_3 = (1, 1, -1)$ forman base de \mathbb{R}^3 ya

que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Para calcular la base dual de la base ordenada $\mathbb{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de \mathbb{R}^3 ,

tendremos en cuenta que, de acuerdo con el apartado 2) de la proposición anterior, se tiene que:

$$(x, y, z) = b^1(x, y, z)b_1 + b^2(x, y, z)b_2 + b^3(x, y, z)b_3 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

lo que nos indicará cómo actúa cada una de las aplicaciones b^i . Calculemos pues la expresión de un vector genérico $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en la base \mathbb{B} :

$$(x, y, z) = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, -1, 1) + \gamma(1, 1, -1) \implies$$

$$\implies \begin{cases} \alpha & + & \gamma & = & x \\ \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & y \\ & & \beta & - & \gamma & = & z \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha & = & y + z \\ \beta & = & x - y \\ \gamma & = & x - y - z \end{cases} \implies \begin{cases} b^1(x, y, z) & = & y + z \\ b^2(x, y, z) & = & x - y \\ b^3(x, y, z) & = & x - y - z \end{cases}$$

Ejemplo 2.4. Si consideramos $f \in (\mathbb{R}^3)^*$, definida según $f(x, y, z) = 2x + y - 3z \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, para calcular sus coordenadas en la base \mathbb{B}^* del ejemplo anterior, tendremos en cuenta que, de acuerdo con el apartado 3) de la proposición anterior, se tiene que:

$$f = f(b_1)b^1 + f(b_2)b^2 + f(b_3)b^3 = f(1, 1, 0)b_1 + f(0, -1, 1)b^2 + f(1, 1, -1)b^3 = 3b^1 - 4b^2 + 6b^3$$

por lo que la terna de coordenadas de f en la base \mathbb{B}^* es $(3, -4, 6)$.

Proposición 2.5. Si V es un K -espacio vectorial de dimensión finita, toda base ordenada de V^* es la dual de alguna base de V .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $\mathbb{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ una base ordenada de V y $\mathbb{B}^* = (b^1, b^2, \dots, b^n)$ su correspondiente base dual. Supongamos que $\overline{\mathbb{D}} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ es una base ordenada de V^* , pretendemos encontrar una base ordenada \mathbb{D} de V de manera que ésta sea su correspondiente base dual, es decir, $\mathbb{D}^* = \overline{\mathbb{D}}$.

Consideremos las siguientes matrices de cambio de base:

$$M_{\mathbb{B}^*, \overline{\mathbb{D}}}(id_{V^*}) = \left[a_j^i \right]_{1 \leq i, j \leq n} \quad M_{\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{B}^*}(id_{V^*}) = \left[c_j^i \right]_{1 \leq i, j \leq n}$$

que por ser una inversa de la otra, se verifica que:

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k^i c_j^k = \delta_j^i$$

Asimismo, de aquí también se deduce que:

$$g_i = c_i^1 b^1 + c_i^2 b^2 + \dots + c_i^n b^n, \quad \forall i, \quad 1 \leq i \leq n$$

Consideremos ahora la matriz $P = (M_{\mathbb{B}^*, \overline{\mathbb{D}}}(id_{V^*}))^T$, que es inversible por ser la traspuesta de una matriz inversible y, haciendo uso de una proposición vista en el capítulo anterior, sabemos que existe

una base ordenada $\mathbb{D} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ de V , de manera que $P = M_{\mathbb{D}, \mathbb{B}}(id_V)$. De acuerdo con esto, se tiene que:

$$d_j = a_1^j b_1 + a_2^j b_2 + \dots + a_n^j b_n \quad \forall j, \quad 1 \leq j \leq n$$

Para comprobar que $\mathbb{D}^* = \overline{\mathbb{D}}$, hay que comprobar que $d^i = g_i \quad \forall i, 1 \leq i \leq n$ y, puesto que d^i y g_i son aplicaciones lineales y quedan unívocamente determinadas por sus imágenes sobre una base de V , bastará comprobar que:

$$d^i(d_j) = g_i(d_j) \quad \forall i, j, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

pero esto sí que se verifica ya que:

$$\begin{aligned} g_i(d_j) &= (c_i^1 b^1 + c_i^2 b^2 + \dots + c_i^n b^n)(d_j) = c_i^1 b^1(d_j) + c_i^2 b^2(d_j) + \dots + c_i^n b^n(d_j) = \\ &= c_i^1 b^1(a_1^j b_1 + a_2^j b_2 + \dots + a_n^j b_n) + c_i^2 b^2(a_1^j b_1 + a_2^j b_2 + \dots + a_n^j b_n) + \dots + c_i^n b^n(a_1^j b_1 + a_2^j b_2 + \dots + a_n^j b_n) = \\ &= c_i^1 a_1^j + c_i^2 a_2^j + \dots + c_i^n a_n^j = a_1^j c_i^1 + a_2^j c_i^2 + \dots + a_n^j c_i^n = \delta_i^j = d^i(d_j) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.6. Consideremos las formas lineales de \mathbb{R}^3 , φ_1 , φ_2 y φ_3 , definidas según:

$$\varphi_1(x, y, z) = 2x - y + z \quad \varphi_2(x, y, z) = x + 2y \quad \varphi_3(x, y, z) = x + y + z \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Comprobaremos en primer lugar que constituyen una base de $(\mathbb{R}^3)^*$, para lo que veremos que forman un sistema libre, y para ello supondremos una combinación lineal de ellas igual a la aplicación nula, es decir:

$$\begin{aligned} O &= \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 \implies O(x, y, z) = (\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3)(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \implies \\ &\implies 0 = \alpha_1(2x - y + z) + \alpha_2(x + 2y) + \alpha_3(x + y + z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

y, puesto que una aplicación lineal queda determinada por las imágenes de una base, bastará considerar, por ejemplo, las imágenes de los tres vectores de la base canónica, para los que se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para } (1, 0, 0) \longrightarrow 0 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \text{Para } (0, 1, 0) \longrightarrow 0 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ \text{Para } (0, 0, 1) \longrightarrow 0 = \alpha_1 + \alpha_3 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{array} \right.$$

pero de aquí se tiene que necesariamente $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ya que se trata de un SELH deter-

minado puesto que la matriz de coeficientes verifica que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Por consiguiente

$\overline{\mathbb{D}} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ constituye una base ordenada de $(\mathbb{R}^3)^*$.

Para calcular una base, $\mathbb{D} = (d_1, d_2, d_3)$, de \mathbb{R}^3 , de manera que $\overline{\mathbb{D}}$ sea su correspondiente base dual, consideremos:

$$d_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad d_2 = (x_2, y_2, z_2) \quad d_3 = (x_3, y_3, z_3)$$

de acuerdo con 2.2, se debe cumplir que $\varphi_i(d_i) = 1$ para $1 \leq i \leq 3$, y $\varphi_i(d_j) = 0$ para $1 \leq i \neq j \leq 3$, por consiguiente se tiene que:

$$\begin{cases} 1 = \varphi_1(d_1) = \varphi_1(x_1, y_1, z_1) = 2x_1 - y_1 + z_1 \\ 0 = \varphi_2(d_1) = \varphi_2(x_1, y_1, z_1) = x_1 + 2y_1 \\ 0 = \varphi_3(d_1) = \varphi_3(x_1, y_1, z_1) = x_1 + y_1 + z_1 \end{cases} \implies d_1 = (x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}\right)$$

$$\begin{cases} 0 = \varphi_1(d_2) = \varphi_1(x_2, y_2, z_2) = 2x_2 - y_2 + z_2 \\ 1 = \varphi_2(d_2) = \varphi_2(x_2, y_2, z_2) = x_2 + 2y_2 \\ 0 = \varphi_3(d_2) = \varphi_3(x_2, y_2, z_2) = x_2 + y_2 + z_2 \end{cases} \implies d_2 = (x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-3}{4}\right)$$

$$\begin{cases} 0 = \varphi_1(d_3) = \varphi_1(x_3, y_3, z_3) = 2x_3 - y_3 + z_3 \\ 0 = \varphi_2(d_3) = \varphi_2(x_3, y_3, z_3) = x_3 + 2y_3 \\ 1 = \varphi_3(d_3) = \varphi_3(x_3, y_3, z_3) = x_3 + y_3 + z_3 \end{cases} \implies d_3 = (x_3, y_3, z_3) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$$